



TITLE:

# 超流動とBose-Einstein凝縮

AUTHOR(S):

碓井, 恒丸

---

CITATION:

碓井, 恒丸. 超流動とBose-Einstein凝縮. 物性研究 1971, 15(6): 432-448

ISSUE DATE:

1971-03-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/88214>

RIGHT:

# シンポジウム

7月3日於基研

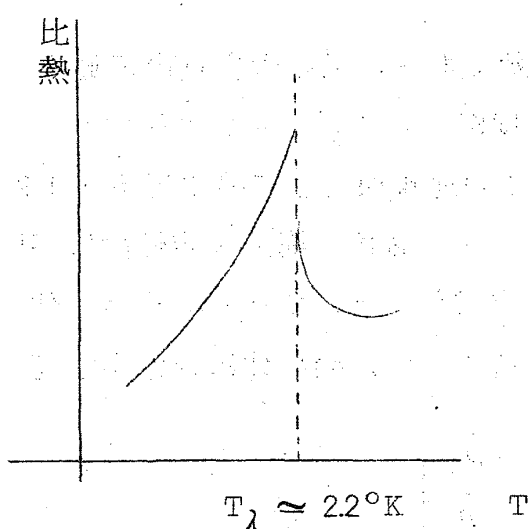
## 超流動と Bose-Einstein 凝縮

名大理 碓井恒丸

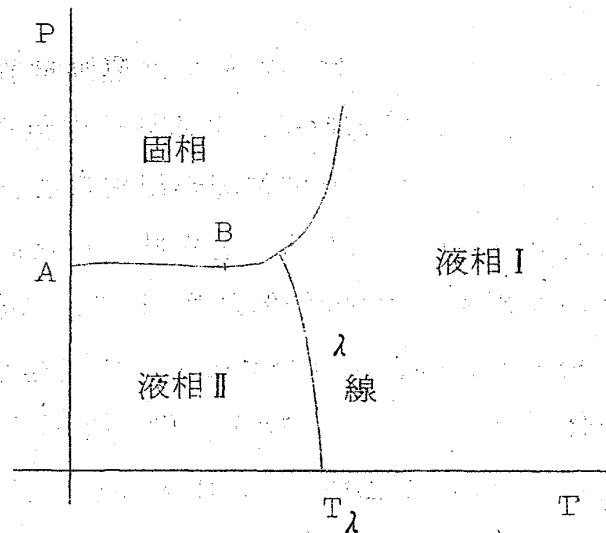
(2月12日受理)

§ 1. “超流動”は1938年の造語である。その概念は固定したものではなく、種々発展して来た。その概観がここでの主題である。

(i) ヘリウムを液化し蒸気を引いて温度を下げると、ある温度で密度の山が発見された。その後 Dana と Kamerlingh-Onnes により1926年比熱異常が同一温度で見出された(第1図)。この相転移はその比熱曲線の形から  $\lambda$ -転移と呼ばれている。液体ヘリウムの性質は  $T_\lambda$  の上下で著しく異なる。



第1図



第2図

第2図に示した2相平衡の曲線を見るとA・B部分が殆んど水平である。これは Clapeyron-Clausius の関係

$$dp_m/dT = \Delta s/\Delta v \quad (1)$$

により、 $\lambda$ 線以下の液相IIが固相に匹敵する秩序を持っていることを示す。それはどんな種類の秩序か。

碓井恒丸

(Ⅱ) 液体 He II が超流動性を示すことは、1938年 Kapitza および Allen と Misener により独立に見出された。毛細管流の方法で粘性を測定したとき、通常液体の Poiseuille flow と異って、圧力差に無関係な流量部分があったのである。しかしその後の振動円板の方法では小さいが有限の粘性が得られた。これはこの液体が、Navier-Stokes 型ではない新しい流体力学に従うものであることを示す。

$\lambda$  転移においてはエントロピーは連続である。この種の相転移を最近第2種とよぶ、この $\lambda$ 転移に対して当初合金の order-disorder の理論を適用することが Fröhlich によって試みられた。London は1938年これが Bose 気体の Einstein 凝縮に対応するものであることを指摘した。同一密度の理想気体の凝縮温度は $\sim 3$  Kであり、この温度におけるエントロピー $1.28 R$ は  $T_\lambda$  における液体ヘリウムのエントロピー $0.8 R$ に匹敵する。そして巨視的な波長を持つ一粒子基底状態の adiabatic transformation によって超流動が実現されるものとした。

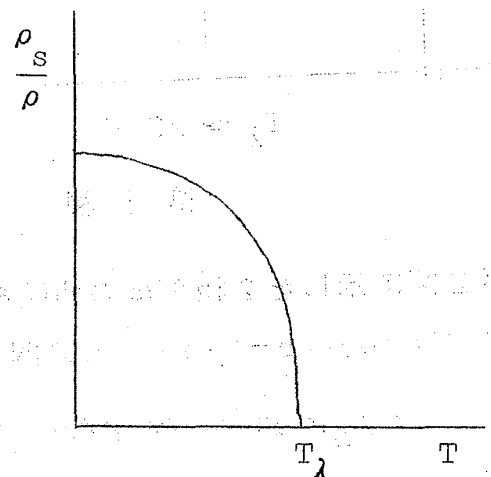
同じ年 Tisza は「凝縮体は運動量散逸に無効であり、毛細管を自由に通る」ものとして、励起粒子による粘性が気体と同程度になること、励起粒子の osmosis により温度勾配が出来ること、またこの逆現象として噴水現象（1938年の発見）があることを結論した。そして Bose 気体の構造を定性的に引写して現象論的-新流体力学としての二流体論を定式化したのである。通常流体が密度  $\rho$  の場と速度場  $\mathbf{v}$  によって記述されるのに対して、凝縮体に対応する超流体 ( $\rho_s, \mathbf{v}_s$ )、励起粒子から成る常流体 ( $\rho_n, \mathbf{v}_n$ ) の二流体場が導入される。全密度  $\rho$  は

$$\rho = \rho_s + \rho_n, \quad (2)$$

全質量流密度  $\mathbf{j}$  は

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \quad (3)$$

で与えられる。そして超流体はエントロピー零であり、粘性もないとする。超流体濃度



第 3 図

$\rho_s/\rho$  は、理想気体に倣って  $1 - (T/T_\lambda)^5$  とおき指数を実験的に定める。

§ 2. 1941 年 Landau は超流動性  $\equiv$  dynamics に主眼をおき, London と Tisza がとった condensate non-dissipative という考えを批判し, 新しい立場から理論を組立てた。それを今様に概説しよう。

一般に状態  $\Psi_0$  に対して, 速度ポテンシャル  $\phi(r)$  をもって流れている状態は

$$\Psi = \Psi_0 \exp \left\{ i \frac{m}{\hbar} \sum \phi(r_i) \right\} \quad (4)$$

で与えられる。このとき

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + mn \nabla \phi \quad (5)$$

$\mathbf{j}_0$  は  $\Psi_0$  における current density,  $n$  は粒子数密度,  $m$  は粒子の質量である。このとき速度場  $\mathbf{v}_s = \nabla \phi$  は勿論渦なしである:

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = 0 \quad (6)$$

荷電粒子系の場合には (5), (6) の代りに

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + mn \nabla \phi - n \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (7)$$

$$\nabla \times \left\{ \frac{1}{n} (\mathbf{j} - \mathbf{j}_0) + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right\} = 0 \quad (8)$$

を得る。(8) は超伝導に対する London 方程式に他ならない。

さて, 以下  $\mathbf{j}_0 = 0$  とし,  $\Psi_0$  は境界条件-壁に対して stationary な状態であったとしよう。このとき上のように変換された  $\Psi$  は安定であろうか? つまり壁との相互作用によって, 内部運動 が励起された  $\Psi'$  へ移る可能性はどうかという問題を考える。この内部運動の素励起が,  $\mathbf{v}_s = 0$  のとき運動量  $\mathbf{p}$ , エネルギー  $\epsilon_p$  であったとすれば,  $\Psi \rightarrow \Psi'$  のエネルギー差は

$$\epsilon_p' = \epsilon_p + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s \quad (9)$$

碓井恒丸

で与えられる。したがって  $\epsilon_p' > 0$  ならば遷移は禁止され、上述の流れている状態  $\Psi$  は安定ということになる。この  $\epsilon_p' > 0$  は Landau の超流動条件である。  $T \neq 0$  の場合には (5) により

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_s + \int \frac{\mathbf{p}}{\exp \{(\epsilon_p' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_n)/T\} - 1} \quad (10)$$

この積分によって  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  の係数を求めればそれが 2 流体論における常流体密度  $\rho_n$  を与える。

超流動条件が満足されているものとして、次に  $\phi$  の運動をしらべよう。

$$\delta \int dt \int [\Psi^* \mathcal{H} \Psi - \frac{i\hbar}{2} \{ \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \}] = 0 \quad (11)$$

に (4) を代入する。  $\Psi_0$  としては、密度分布  $n(\mathbf{r}, t)$  が与えられているものとして、その条件のもとでの基底状態をとる。つまりその波動関数が real, positive definite でかつ座標交換に対して対称であるものをとる。まず  $\delta n(\mathbf{r})$  の変分係数を零として

$$m \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right\} + \mu = 0, \quad (12)$$

$$\mu \equiv \delta \int \Psi_0^* \mathcal{H} \Psi_0 / \delta n. \quad (13)$$

また変分  $\delta \phi$  から連続の方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \nabla \phi) = 0 \quad (14)$$

が得られる。

こうして完全流体の力学が得られるが、Landau の量子流体力学はこの種の運動による励起状態を論じたものといえることができる。ただ  $\rho, \mathbf{v}$  を演算子として場を量子化して考えたのである。これから低い励起状態として、量子化された密度波, phonon が現われる。この縦波に対して, potential

flow でないもの

$$\nabla \times \mathbf{v} \neq 0 \quad (15)$$

は全く別種の励起と考えなければならない。この種の励起量子を roton と呼ぶ。以上の考察から roton excitation には一般に gap があってもよい。Landau はこうして励起スペクトルの形を推定し、 $\mathbf{v}_s$  が超流動条件 (9) を満足する範囲にあるものとして、励起量子に統計力学を適用し二流体理論 (10) を展開したのである。

上述の“量子流体力学”の考えに沿って粒子場を論じ励起スペクトルを導く努力が砂川達によって続けられ成果が得られている。

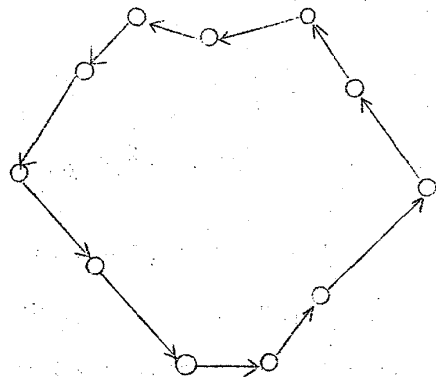
流体力学 (12) ~ (14) には量子効果が explicit にはあらわれていない。しかしここに Planck 定数が簡明な形で顕在する流れの形態がある。それは渦糸である。これに関する Feynman の circulation theorem を次に述べる。第 4 図に示すように、各原子をそれぞれ隣の原子の位置へ移して閉じさせる ring 状の変位を考える。このとき変位の途中で波動函数の振巾が零にならなければ、  
波動函数の位相変化は

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{m}{h} \nabla \phi(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i \\ \Rightarrow \frac{m}{h} \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。ただし ring を充分大きくとるなどして、 $\phi(\mathbf{r})$  の空間変化がゆるやかであることを保証しておく。この手続の結果原子配置はもとのものにもどったから、位相変化は  $2\pi \times$  整数でなくてはならない。ゆえに

$$\text{circulation unit} = \frac{h}{m} \quad (17)$$

である。もし原子が pair を作っているものとする、このような変位を行わ



第 4 図

碓井恒丸

せようとして pair を引裂くと波動函数は零になる。したがって pair をそのまま変位させなくてはならない。その結果 circulation unit として  $\hbar/2m$  が得られる。

### § 3. 分子論

London, Tisza の Bose-Einstein 凝縮の理論と Landau の励起量子の理論を定性的に統一してみせたのは Bogolyubov である。彼は弱い反撥相互作用をもつ Bose 粒子系を論じた。基底状態にある理想 Bose 気体に対しては

$$N_0 = N, \quad N_p = 0 \quad (p \neq 0) \quad (18)$$

したがって弱い反撥相互作用をしている Bose 気体の、あまり高くない励起エネルギーの状態に着目するかぎり

$$\langle a_0^\dagger a_0 \rangle \simeq N \quad (19)$$

である。これにもとづいて  $a_0$  の演算子性を無視し c-number として扱う。 $p \neq 0$  の演算子  $a_p$  についての harmonic approximation から Bogolyubov は励起スペクトル

$$\epsilon_p = \begin{cases} cp & \text{for small } p \\ \Delta + p^2/2\mu & \text{for large } p \end{cases} \quad (20)$$

を導くことができた。(20) は phonon であり、(21) は準粒子型であって、しかも相接続して一つの分枝をつくっているのである。

凝縮体が  $\mathbf{v}_s$  で流れている場合には、 $\phi = \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{r}$  として

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= e^{-im\sum\phi/\hbar} \mathcal{H} e^{im\sum\phi/\hbar} \\ &= \frac{m}{2} N v_s^2 + \mathcal{H} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_s \end{aligned} \quad (22)$$

のように変換された Hamiltonian を用れば、境界条件を壁に対して stationary とすることができる。この場合励起スペクトルは

$$\epsilon_p' = \epsilon_p + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s \quad (9)$$

になることが明らかであろう。そこで統計力学を適用すれば二流体論の諸量が求まること既に述べた通りである。

以上の考察は相互作用の弱い場合であった。一般の場合上記の理論構造を受けついで一般的な枠組を作るにはどうしたらよいか。まず1体の密度行列によって

$$\int \langle \psi^+(x', t) \psi(x, t) \rangle \Psi(x', t) dx' = N_0 \Psi(x, t) \quad (23)$$

$$\text{with } \int |\Psi|^2 dx = N_0 \quad \text{macroscopic} \quad (24)$$

ということで B.E. 凝縮を一般化しておく。(これは2体以上の場合にも拡張できる。Yang はこの一般化を Off-Diagonal Long Range Order と呼ぶ。)

さてこの凝縮体場の small oscillation を考える。

$$\Psi = \sqrt{n_0} e^{-i\mu t} \left( 1 + \frac{g}{n_0} e^{ikx} + \frac{g_1^*}{n_0} e^{-ikx} \right) \quad (25)$$

ここで  $g$  は  $n_0$  と同様 macroscopic number, ただし  $g/n_0 \ll 1$  である。この場合

$$g = a_0^* a_k / V, \quad g_1 = a_{-k}^* a_0 / V \quad (26)$$

の関係があるから,  $a_k, a_{-k}^*$  を, 凝縮体の運動を記述する c-number 力学変数と考えてよいことになる。これらは非凝縮粒子に対しては外場と見做すことができる。  $g, g_1$  の運動方程式における非斉次項を  $g, g_1$  に対する線型応答の形に書くことにより, 凝縮体に関する連続の方程式が得られる。その際凝縮体は密度  $n_0$  でなく, renormalize された“超流体密度”

$$n_s = n_0 + \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} \chi_\omega(k \cdot \hat{j}_k, B_k^+ - B_{-k}) \quad (27)$$

の形で, 輸送されるものであることがわかる。ただし  $B_k \equiv a_0^* \partial \mathcal{H} / \partial a_k^*$  であり,  $j_k$  は非凝縮体の current density であり,  $\chi_\omega$  は suscepti-



碓井恒丸

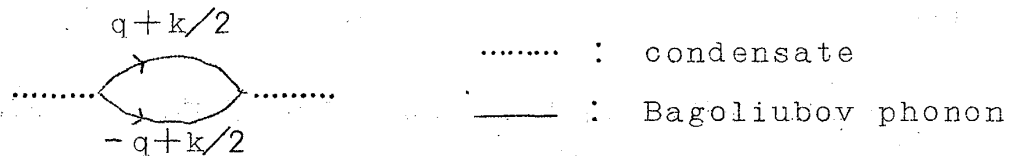
bility (retarded Green's function) である。また全質量に関する連続の方程式とあわせ考えると常流体密度として

$$n_n = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( -\frac{m n_0}{k^2} \right) \chi_{\omega} (k \cdot \hat{J}_k, k \cdot \hat{J}_k^+) \quad (28)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{m}{V} \int_0^{1/T} d\lambda \langle e^{\lambda \mathcal{H}_{J_{kx}}} e^{-\lambda \mathcal{H}_{J_{kx}^+}} \rangle \quad (29)$$

を得る。後の形は Landau-Onsager の表現に一致している。

弱い相互作用の場合 (27) を分析すると凝縮体が



第 5 図

で示される過程により renormalize されることがわかる。

#### § 4. 現象論

凝縮体場  $\Psi$  について現象論的な考察によりどんなことが言えるか。 $\Psi$  は熱力学的に言えば order parameter であるが、波動函数とおなじ変換性を持っていることが、この際重要である。

(A) 今励起量子の mean free path を  $\ell$ , order parameter の相関距離を  $\xi$  とすれば、一般に  $T \rightarrow T_\lambda$  で  $\xi \rightarrow \infty$  であるから

$$\ell \ll \xi \quad (30)$$

が成立する温度領域が存在する。考察をここに限ることにしよう。このとき系の状態は全密度  $n$ , エントロピー密度  $S$ , current density  $j$  および  $\Psi$ ,  $\Psi^*$  で記述できる。 $\Psi$  については (a) 一義的, ただし gauge 変換  $\Psi \rightarrow \Psi e^{i\alpha}$  に対して物理量が不変である。また全系を  $\mathbf{v}$  で動かすと変換

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{im\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (31)$$

を受ける。この要請のもとづき自由エネルギーを  $\nabla \Psi$ ,  $\mathbf{v}_n$  について 2 次ま

での近似で書くと，一般に

$$F' = F_0(n, T, |\Psi|^2) + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - m\mathbf{v}_n)\Psi|^2 - \frac{1}{2}nm\mathbf{v}_n^2 \quad (32)$$

となる。 $m^*$  が唯一のパラメータである。 $\mathbf{v}_n$  は Lagrange multiplier であって，current density はこれから関係

$$\mathbf{j} = -\partial F' / \partial \mathbf{v}_n \quad (33)$$

によって定まる。 $\Psi$  の time development は，その時の状態でききると仮定すれば

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{\mu} + i\hbar \hat{B} \right) \Psi \quad (34)$$

の形の運動方程式が成立する。Galilei 不変性から hermitian 演算子  $\hat{\mu}$ ， $\hat{B}$  の中に空間微分は  $(-i\hbar\nabla - m\mathbf{v}_n)$  の形で含まれていなくてはならない。非可逆過程 ( $T_\lambda$  近傍で dominant なものとして凝縮体の緩和過程だけを考える) が行われていないとき

$$n_s = \frac{m}{m^*} |\Psi|^2 \quad (35)$$

が保存されると仮定する。この要請から  $\hat{B}$  のうち非可逆過程に関聯しない部分  $B_i$  が定まる。更に非可逆過程の熱力学の方法に従ってエネルギーが保存量だという要請を行うと，運動量 flux,  $\hat{\mu}$  および  $\hat{B}$  の残部  $B_r$  とがきまってくる。

第2種相転移に関する Landau 理論を  $F_0$  に適用し，更に static scaling law から結論される  $m^* \propto \epsilon^{1/3}$  ( $\epsilon \equiv (T_\lambda - T)/T_\lambda$ ) を採用すれば， $\lambda$  点近傍の第一音波と第二音波との吸収係数および  $n_s$  を統一的に再現する結果が得られる。

(B) 次に上記仮定 (30) に頼らず， $\Psi$  の量子力学性にもとづいて言える干渉性について述べる。一般に BCS 型の凝縮体<sup>\*</sup>も含めて秩序度パラメータ  $\Psi$  に対し量子力学的波動函数としての性質，(b) 電荷  $e^*$  をもつとき

$$A \rightarrow A - \nabla \chi, \quad V \rightarrow V + \frac{1}{c} \dot{\chi}$$

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{-ie^* \chi / \hbar c} \quad (36)$$

\*) このとき

$$\iint \langle \psi_{\downarrow}^+(x'_1) \psi_{\uparrow}^+(x'_2) \psi_{\uparrow}(x_2) \psi_{\downarrow}(x_1) \rangle \Psi(x'_1, x_2) = N_0 \Psi(x_1, x_2)$$

( $N_0$ : 巨視的数) で凝縮の存在が定義される。凝縮体場は  $\Psi(x, x)$

$\Rightarrow \Psi(x)$  で記述される。

を要請する。以下中性粒子に対しては適宜  $e^* = 0$  とおけばよい。

$\Psi = |\Psi| e^{i\varphi}$  ととったとき, この変換に対する不変量として

$$\nabla \varphi - \frac{e^*}{\hbar c} A = m j_s / n_s \hbar = m v_s / \hbar \quad (37)$$

$$\dot{\varphi} + \frac{e^*}{\hbar} V = -\mu^0 / \hbar \quad (38)$$

である。ただし  $n_s$  は (35),  $\mu^0$  (あるいは  $\mu^0 + e^* V$ ) は chemical potential の意味をもつ。Cooper Pair condensate の場合  $e^* = 2e$  であり, (38) は Josephson の frequency equation と呼ばれる。

$\Psi$  が一価であることから

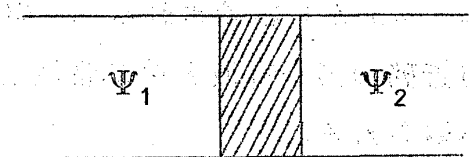
$$\oint \nabla \varphi \cdot ds = 2\pi \times \text{整数} \quad (39)$$

を得るが, これは (37) により neutral system に対し circulation quantum  $\kappa_0 \equiv \hbar/m$ , charged system に対し flux quantum  $\Phi_0 \equiv \hbar c / e^*$  が存在することを示す。

以上の検証となる実験:

(i) spatial interference

図のように不導体薄膜を超伝導体で sandwich して作った junction では, 自由エネルギーが位相差の (周期) 函数になる。



第 6 図

1st harmonics のみ残すと (37) により

$$\Delta \bar{F} = E_1 \left\{ 1 - \cos \left( \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{e^*}{\hbar c} \int_2^1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) \right\} \quad (40)$$

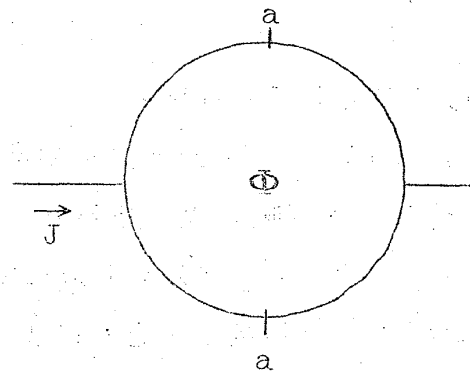
( $E_1 > 0$ ) .

したがって junction を流れる電流密度は

$$\begin{aligned} j &= -c \delta \Delta \bar{F} / \delta A \\ &= e^* \frac{E_1}{\hbar} \sin \left( \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{e^*}{\hbar c} \int_2^1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

で与えられる。例えば磁場を間隙に平行に局所的にかけた場合について積分すると、間隙を渡る全電流が  $\sin \pi \Phi / \pi \Phi_0$  に比例する ( $\Phi$  は  $\Phi_0$  単位で測った全磁束)。こうして磁場強度の変化とともに Fraunhofer の one slit diffraction 型の干渉が見られる。

また第 7 図のように 2 個の同型 junction を持ち flux  $\Phi$  をかこむ超伝導回路では、やはり (37) により、電流  $J$  が  $\cos \pi \Phi$  に比例する Fraunhofer の two slit diffraction 型の干渉を実現することができる。



第 7 図

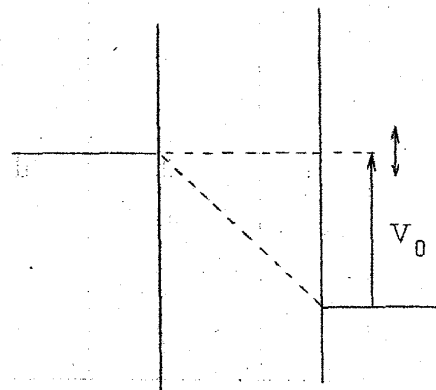
(ii) a. c. Josephson 効果等  
junction に電位差

$$V = V_0 + v_0 \cos \omega t \quad (42)$$

がかかっている場合には, (38) から, 一般に

$$e^* V = \hbar \omega \times \text{整数} \quad (43)$$

のとき時間平均が零にならない電流部分が存在する。このとき放射された photon も観測される。



第 8 図

液体ヘリウムでは液面高が異った二

碓井恒丸

つの容器を小孔で連結し、そこにおいた超音波発生器を使って同様な現象を見ることができる。しかしこの種の junction を弱結合と見做すことは無理であって、完全な平行現象ということとはできない。

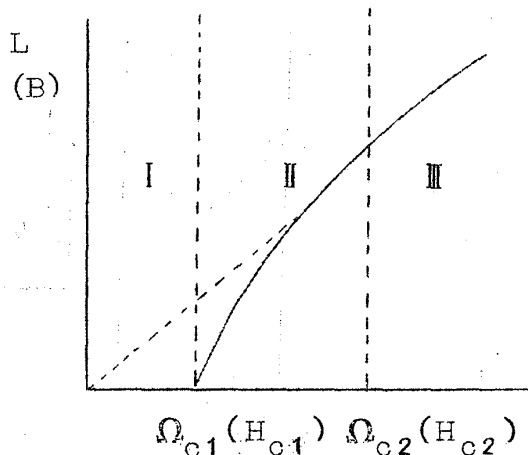
### (c) 相関距離と侵入距離

前節で述べた干渉現象を、超伝導体では比較的容易に観測できたのに、液体ヘリウムでは未だに実現できていない。それは凝縮体場の特性の差に起因している。

超伝導体における磁場に対応して、液体ヘリウムに apply できる transverse probe は円筒容器を回転させることである。その対応は、例えば自由エネルギーの表式で見ることができる。z 軸まわりの回転角速度を  $\Omega$  とすると  $\mathbf{v}_n = \Omega \times \mathbf{r}$  であるから

$$F = F_0(n, T, |\Psi|^2) + \begin{cases} \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - m\Omega \times \mathbf{r})\Psi|^2 \\ \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A})\Psi|^2 \end{cases} \quad (44)$$

ただしこのようにとったとき current は、neutral system では  $\mathbf{v}_n$  に対する relative current であり、charged system では total current だという意味の差がある。 $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}$  ととって (44) を比較すると、probe として  $e^*H/2c$  に対して  $m\Omega$  をとり、response として磁束密度  $B$  に対して角運動量  $L$  をとればよいことがわかる。 $\Omega(H)$  の大きさによって response は 3 種に分れる。



第 9 図

領域 I：超流体は静止（超伝導体では磁束零の Meissner state）。

領域 II：量子渦糸が等密度で分布し  $\Omega$  で回転（quantum flux が等密度で分布する mixed state）。

領域 III：全部常流体となり剛体的に回転（正常金属状態。磁場は殆んどそのまま侵入）。

これらの領域の境界は、相関距離を

$\xi$ , 磁場侵入距離を  $\lambda$ , 回転バケツの半径を  $R$  とすれば,

$$m\Omega_{c2} \sim \hbar/\xi^2 \quad (e^*_{H_{c2}}/c \sim \hbar/\xi^2) \quad (45)$$

$$m\Omega_{c1} \sim \hbar \frac{\log(R/\xi)}{R^2} \quad (e^*_{H_{c1}}/c \sim \hbar \frac{\log(\lambda/\xi)}{\lambda^2}) \quad (46)$$

で与えられる。これから見て、液体ヘリウムの凝縮体場は、超伝導の場合で言う  $\lambda \rightarrow \infty$  ( $R$  は巨視的長さ!) に相当すると言える。それだけに止まらず  $\xi$  は、渦輪の実験から  $\sim 10^{-8} \text{ cm}$  と評価されているが、これは超伝導の場合の  $\xi \sim 10^{-5} \text{ cm}$  に比べて、全く原子的だと言わなければならない長さである。これは次節で見るように凝縮体粒子の質量の差に起因している。ただし  $T_\lambda$  の極く近くの温度では

$$\xi \propto |T_\lambda - T|^{-2/3} \quad (47)$$

に従って長くなるものである。

## § 5. Restricted Geometry の B.E. 凝縮

自由エネルギーの表式として (32) をとり,  $|\Psi|^2$  が小さいところを考えることにして,

$$\Delta F_0 = a |\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 + \dots \quad (48)$$

と展開する。一様な平衡値は  $\Delta F_0$  の極小条件から

$$\Psi_e^2 = -a/b \quad (49)$$

ときまる。(48) において

$$\Psi(x) = (\Psi_e + \psi(x)) e^{i\phi(x)} \quad (50)$$

とおき  $\psi, \phi$  について 2 次まで残す。相対確率  $e^{-F/kT}$  を以て実現される揺動について平均をとると

$$\langle \Psi(x) \Psi^*(x') \rangle \simeq \Psi_e^2 \times \begin{cases} e^{-2\pi\xi r} & \text{I} \\ e^{-2\xi \log 2r/\xi} & \text{II} \\ e^{-\frac{2}{\pi}\xi/r} & \text{III} \end{cases} \quad (51)$$

碓井恒丸

がそれぞれ 1 次元, 2 次元, 3 次元に対する計算結果である。ただし  $r \equiv |x - x'|$ , また位相相関距離  $\xi$  (次元によってディメンションが異なる) は

$$\xi = m^* kT / 4\pi \Psi_e^2 \hbar^2 \quad (52)$$

で与えられる。この計算では次元数の差異は状態数の計量に差を生じるだけである。これから最大の固有値  $\int \langle \Psi(x) \Psi^*(x') \rangle d^n x'$  は 3 次元の場合にだけ容積  $L^n$  に比例することがわかる。すなわち B.E. 凝縮は 3 次元の場合にのみ起り得るという結論である。

この結論は厳密な不等式

$$\langle a_p^+ a_p \rangle \geq -\frac{1}{2} + \frac{kT}{p^2/m} \frac{|\langle a_0 \rangle|^2}{N} \quad (53)$$

から導くこともできる。したがって問題はこの消極的な結論を超えて, 低次元の場合 B.E. 凝縮と異なった相転移が起り得るか。その相はどんな相か。超流動を示すのかといった研究であろう。

## § 6. Intrinsic critical velocity と coherent state

流れている超流動状態は絶対安定の平衡状態ではない。凝縮体場が熱揺動を行えば環状永久流が減衰できる。しかし一様な流れの状態間のエネルギー差は  $N/L^2$  に比例し, その確率は圧倒的に異なる。これは熱揺動によって局所的に  $\Psi=0$  が実現され, それを芽とする何らかの異常構造が成長し, 長さに沿っての位相が  $2\pi$  だけ減少した結果をもたらすものと考えられる。これを過飽和気体の凝縮が臨界液滴という構造を通じて起ることに対比すれば, 臨界構造物は渦輪だというのが Langer と Fisher の指摘である。彼らは rate process の理論を適用しているが, ここで展望として二つの問題が考えられる。その一は所謂 homogeneous nucleation と, critical nucleus からの成長の力学の問題, その二は当面の量子統計的凝縮体の場合にこの種の議論をどういう表現で展開したらよいかという問題である。

この類の問題は以前から意識されていた。渦糸の発生は既に 1955 年に Feynman が問題にしている。また温度下降に伴って凝縮体が発生成長する間

題もこの category に属するであろう。これは laser 光の発生成長に類似しているものと思われる。

この種の問題を取扱うのに coherent state representation が着目される。この formulation は, boson annihilation operator の固有状態

$$a_k |\alpha_k\rangle = \alpha_k |\alpha_k\rangle \quad (54)$$

によって作られた

$$\prod_k |\alpha_k\rangle \equiv |\{\alpha\}\rangle \quad (55)$$

が many boson system に対して (non-orthogonal ではあるが) complete になっていることに基づく。ただし measure は

$$\prod_k d(\operatorname{Re} \alpha_k) d(\operatorname{Im} \alpha_k) \quad (56)$$

ととる。x 表示では

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \alpha_k e^{ikx} \\ \hat{\Psi}(x) |\{\psi\}\rangle &= \psi(x) |\{\psi\}\rangle \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

と書かれる。

特に  $|\alpha_k|^2 \gg 1$  ならば Heisenberg 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha_k^*}, \quad i\hbar \frac{\partial \alpha_k^*}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha_k} \quad (58)$$

に還元し, 古典場の性質を持つ, 勿論正確な変換もできるわけであるが, この表示が有効であるのはやはり, 古典場あるいは準古典場の近似がよい場合であろう。

Langer は density matrix  $\rho\{\psi\}$  が,  $\psi_s$  のところで鋭い圧倒的な山を持つとしたとき,  $\psi_s$  を超流体に同定し, そのまわりの揺動を常流体に同定している。しかしこれは検討を要する問題である。Coherent state representation を超流動の問題にどのように使いと有効であるか, それはまだ誰も示していないと言ってよいだろう。



§ 7. 凝縮体濃度  $n_0/n$  の評価

Penrose と Onsager は hard sphere system に対する Feynman 波動関数を用いて  $n_0/n \simeq 0.08$  と評価し, Miller と Pines と Nozieres は中性子散乱のデータを分析して  $\sim 0.10$  と推定している。他にも種々の説があり,  $0.5 \sim 0.8$  に達する数値も出ている。

最近 Chester は Jastrow 型の trial function

$$\prod f(r_{ij}) \quad (59)$$

において

$$f(r) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{b}{r} \right)^m + \frac{uc}{\pi^2 \rho \hbar} \frac{1}{r^2 + k_0^{-2}} \right\} \quad (60)$$

ととって算出した。指数の第一項は short range, 第二項は phonon 型の collective motion による long range correlation を代表するのである。結果は short range correlation だけだと  $0.131$ , long range correlation をも考慮すると  $0.101$  となっている。repulsion が効くと凝縮体濃度は減少する。

Wong の最近の研究では, self-consistent field の方法によると  $n_0/n$  が negligible になり, しかも opposite momentum pair の形成に対し不安定だと結論しているようである。それでは渦輪の実験等で得られた circulation quantum とどう調和させるのか, pair condensate のみならば half quantum  $\hbar/2m$  になる (§ 2)。

## § 8. 固体における B.E. 凝縮

(i) 量子固体特に  $\text{He}^3$ ,  $\text{He}^4$  中の点状欠陥 — 例えば空孔, 不純物等 — は格子中を動きまわる。その量子状態のエネルギーは, 欠陥創製のための損と波長が伸びることによる運動エネルギーの得との差引でさまる。この量子を Lifshitz は vacancion, impuriton などと呼んでいる。さてもしこの引算が負の結果を与えるならば, 絶対零度でのこの固体の状態は, 各格子点に原子が 1 個ずつ存在する正常状態と著しく異なる。特に固体  $\text{He}^4$  中の vacancion は Bose 統計に従うから, B.E. 凝縮が起るであろう。勿論凝縮

が進むと相互作用によってエネルギーが増加するから、凝縮はある程度で止む。しかしこの結果、超流動を示す流体的性質と固体的性質とを兼備した新奇な状態が出現する。彼らは熱励起をも考慮した現象論的な方程式を導き、かつ磁性金属球を包んで凍らせた  $\text{He}^4$  に不均一磁場によって数  $g$  の力をかけ移動させてこの性質を検出しようとしている。

最近恒藤氏は量子固体における B.E. 凝縮の可能性について論じ、また恒藤松田両氏は上述の新しい状態も含めて、固体・液体の ODLRO のある状態、ない状態を格子模型によって分類整理した。

(ii) 固体中の exciton の Bose 凝縮を最近 Kohn が論じているが結論は、ODLRO は存在し得ても超流動は起らないということである。それは環状の固体を軸まわりに回転させたとき mass current は剛体回転の値に一致するということを意味する。

(iii) 磁気的な長距離秩序は、Ising 的なものは別として、やはり B.E. 凝縮 — ODLRO の category に入れることができる。このとき動力学的な問題として、例えば domain boundary の運動が考えられる。これについて昔 Landau と Lifshitz の議論があったが、今日的立場で見直すことも興味がある。